Una propuesta para la enseñanza del número entero desde un enfoque socioepistemológico: reflexiones para el rediseño del discurso MATEMÁTICO ESCOLAR

Lucía Caraballo
FBIOyF/UNR - IES N.° 28
luciacaraballo89@gmail.com
Daniela Emmanuele
FCEIA/UNR - IES N.° 28
emmanueledaniela@gmail.com
Susana Enciso
FBIOyF/UNR
susyenciso@gmail.com

Resumen
Esta investigación presenta los resultados de la implementación de una propuesta didáctica que aborda la enseñanza del número entero desde un enfoque Socioepistemológico. La experiencia se desarrolló en dos cursos de primer año de dos escuelas secundarias de la ciudad de Rosario, Santa Fe. Para ello, se diseñaron tres actividades: dos de carácter lúdico y una con perspectiva histórica. Las mismas tienen como objetivo acordar un modo de representación significante, el del + y el -, que representan números positivos y números negativos respectivamente; favorecer la superación de la concepción de número únicamente como cantidad; y realizar un recorrido histórico-epistemológico del número entero, que permita identificar los obstáculos presentes en su constitución como objeto matemático. Se considera que la propuesta propicia la problematización del conocimiento superando la visión tradicional según la cual es la/el docente quien comunica verdades preexistentes a las/os alumnas/os y que concibe a la matemática como un campo de conocimiento acabado y continuo (características propias del discurso Matemático Escolar). Por el contrario, las/os estudiantes pudieron reconocer que la aceptación del número entero implicó superar concepciones previas —como la del número natural— y que dicho proceso no fue lineal ni acumulativo, sino atravesado por tensiones, conflictos y rupturas epistemológicas.

Palabras clave
Número entero, Propuesta de enseñanza, Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, Escuela secundaria

Introducción

Esta experiencia es el resultado de una continuación de otros estudios (Emmanuele y Abinal, 2019; Emmanuele y Abinal, 2020, Emmanuele et al., 2021) enmarcados en el Proyecto de Investigación 80020210300108UR (Universidad Nacional de Rosario), en donde se analizó la enseñanza del número entero negativo en el nivel secundario de escolaridad. En uno de estos estudios (Emmanuele y Abinal, 2020) se presentó una propuesta áulica basada en la recreación de prácticas de referencia emergentes en la administración de finanzas, mediante el uso de registros para manipular cantidades como créditos y débitos.

En esta investigación se comunica una modificación y continuación de la propuesta anterior, que tiene como propósito la construcción del concepto abstracto de número entero desde un enfoque Socioepistemológico. Se pretende, a partir de las reflexiones que surgen de la experiencia, aportar al rediseño del discurso Matemático Escolar para la enseñanza de los números enteros en el nivel secundario de escolaridad. Para ello, se han diseñado tres actividades (dos de tipo lúdico y una de perspectiva histórica) para la introducción del concepto de número entero y la operatoria suma dentro de este campo numérico. Se presentan resultados de todas las actividades que se relatan más adelante.

Justificación conceptual de la propuesta

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) es una teoría científica que se caracteriza principalmente por estudiar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. No restringe el análisis hacia los objetos matemáticos y sus relaciones, sino que considera como problema educativo la significación compartida del objeto mediante su uso culturalmente situado. Esto quiere decir que las/os alumnas/os participan activamente de la cultura matemática, presente en sus propias experiencias de su vida diaria, dentro y fuera del aula (Cantoral et al., 2014). Sin embargo, en la matemática escolar circula un discurso que norma y regula la presentación y la acción sobre los conocimientos matemáticos que allí se presentan, generando consensos. Estos consensos que se realizan a fin de introducir la matemática en el sistema didáctico son denominados, en esta teoría, como discurso Matemático Escolar (dME). El dME se reconoce como impositivo, donde el conocimiento matemático aparece en forma estática, no susceptible de construcción o modificación por parte del individuo (Soto y Cantoral, 2014). Al ser el/la profesor/a quien comunica verdades preexistentes a sus alumnas/os, la construcción social del conocimiento queda rezagada en el dME. La TSME plantea que el conflicto en la enseñanza y en el aprendizaje radica en el propio dME (Cantoral et al., 2015). Por tal razón, propone rediseñar el dME, a través de plantear el estudio de la matemática ya no centrado en objetos matemáticos sino en las prácticas que los han producido y que favorecen su necesidad (Reyes Gasperini y Cantoral, 2014). En Cantoral et al. (2015) se caracteriza teóricamente al dME y se fundamenta su rediseño:

- Carácter utilitario: el dME antepone la utilidad del conocimiento matemático frente a cualquiera de sus restantes cualidades. En su rediseño la matemática debe tener un carácter funcional, organizándola según el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de las personas que la usan y la aprenden.

- Atomización de los conceptos: el dME concibe al saber centrado en objetos, sin considerar los aspectos sociales, contextuales y culturales que lo constituyen. Su rediseño permite reconocer, privilegiar y potenciar racionalidades relativas a contextos situados, a la realidad en la que se encuentre el individuo en tiempo y espacio.
- Carácter hegemónico: el dME concibe a la matemática como un conocimiento acabado y continuo, dando supremacía a ciertas argumentaciones y significados frente a otros. Su rediseño plantea diversas maneras de constituir y desarrollar la matemática, relativa a la racionalidad contextualizada del grupo o individuo.
- Falta de marcos de referencia para la resignificación del saber: se ha pasado por alto el hecho de que la matemática responde a prácticas de referencia, es decir que su significación no es estática. El rediseño del dME propone resignificar los saberes progresivamente, enriqueciéndolos con nuevos significados.

Son varios los estudios que evidencian las dificultades que se presentan en las/os estudiantes al aprender el concepto de número negativo y su operatoria (Iriarte et al., 1991; Bruno, 1997; Pluvinage y Flores, 2016). En Emmanuele et al. (2021), se realiza un análisis de propuestas editoriales de uso frecuente y se entrevistan a cuatro docentes que trabajan con estudiantes el contenido número entero. Entre los datos recolectados se observa una asociación de números positivos y negativos a las operaciones de suma y resta, en vez de formarse progresivamente el concepto como entidad abstracta (números con signo). Además, se atienden a las operaciones en términos aritméticos (suma y resta) y no en términos algebraicos (suma algebraica). La mayoría de las propuestas editoriales analizadas proponen actividades algorítmicas, repetitivas y escasos problemas contextualizados. La historia y la epistemología del contenido se hallan prácticamente ausentes. Cuando revisamos los libros de texto analizados y otros correspondientes a la educación secundaria, notamos que se suele definir el conjunto de los números enteros como aquel que contiene a los números naturales, el cero y los opuestos a los números naturales (enteros negativos) (Abálsamo et al., 2013; Kaczor y Outón, 2017; Effenberger, 2013). De esta manera, se concibe al número entero como una extensión del conjunto de números naturales sin ningún tipo de conflicto u obstáculo en su construcción, en contraposición a lo sucedido a lo largo de la historia de este campo numérico. Reconocer este hecho, sirve para comprender y adentrarse en el actual dME en torno al número entero puesto que: “El libro de texto, como objeto cultural, es un medio mediante el cual se construye el consenso educativo. Sirve por tanto para introducir una ideología y para legitimar contenidos y formas específicas del conocimiento escolar” (Cantoral et al., 2015, p. 10). Esta legitimidad de contenidos obstaculiza la construcción social de los conocimientos en el aula, puesto que está centrada en objetos que no son problematizados. Se trata de una epistemología dominante que impone significados, argumentaciones y procedimientos. En contraposición, se intenta promover una significación de estos objetos que provenga del uso del conocimiento matemático, centrado en prácticas sociales. El concepto de número entero llevó una extensa cantidad de siglos hasta constituirse como tal: la concepción pitagórica de número como cantidad o medida mensurable fue la predominante en la comunidad científica hasta mediados del siglo XIX. La matemática estaba ligada a lo empírico, al mundo exterior. La aparición de los números enteros puso en tela de juicio pilares esenciales de la filosofía de la matemática (Gallardo y Basurto, 2010).

"Percibe la matemática como descubrimiento que encuentra validez en la realidad y no como una creación social, por lo que la matemática surgía por la necesidad de contar y representar correctamente situaciones que utilizaban lo concreto, lo intuitivo y lo real para justificar el pensamiento que involucraba la representación y uso del número como cantidad o medida de magnitud" (Herrera y Zapatera, 2019).

Los primeros registros de números positivos o negativos aparecen en el libro chino Chui-chang suan-shu (aproximadamente 250 a.C.), donde se utiliza el término Fu para indicar un resultado negativo de una resta y el término Cheng para una diferencia positiva (utilizando colores negro y rojo para cada uno de ellos). Los indios introdujeron estos números para identificar deudas o activos, en el contexto financiero. Sin embargo, la aparición de soluciones negativas de ecuaciones, por ejemplo, en Egipto y Babilonia durante los siglos XI y XII a.C., fue motivo de discusión en la comunidad matemática occidental en cuanto a su aceptación, al punto de clasificarlas como falsas, ficticias o absurdas. Esta concepción de número asociado a lo empírico y a los objetos físicos, cambió a partir de planteamientos como los realizados por el matemático alemán Hankel (1867), en el contexto del problema de la aritmetización del análisis, puesto que considera que los números reales deben considerarse como estructuras intelectuales y no como magnitudes heredadas de la geometría de Euclides (Boyer, 1986). El cambio de concepción implica pasar de entender la matemática como una disciplina vinculada a las percepciones sensoriales a concebirla como una creación intelectual del ser humano. La matemática pasa de ser descubierta para, en tanto, ser inventada. Este cambio conceptual permitió que la matemática avanzara y fueran aceptados, no solo los números enteros, sino también los números reales y los números complejos (Herrera y Zapatera, 2019).

El estudio de los números enteros en la educación secundaria requiere entonces un cambio de concepción de número que se forma en la educación primaria (la de número natural). Es aquí donde se produce una ruptura (que es epistemológica (Bachelard, 1997)) con lo concreto y lo físico.

"Se inicia al estudiante en la matemática formal donde, en muchas ocasiones, su actividad matemática no tendrá fundamentación en lo real, intuitivo y concreto y, para soportar sus argumentos, conclusiones y respuestas, tendrá que hacerlo dentro de las mismas reglas matemáticas" (Herrera y Zapatera, 2019).

Por tal razón, es de suma importancia la elaboración de propuestas educativas que aborden los conceptos, y en este caso del número entero, desde una epistemología situada -o epistemología de prácticas- (tal como se propone para el rediseño del dME) que reconozca las contradicciones y luchas internas que se debieron sortear para constituirse como tal (Cordero, 2001).

Metodología de trabajo

Esta experiencia se llevó a cabo en dos cursos de primer año de dos escuelas secundarias de la ciudad de Rosario. Cabe aclarar que las/os alumnas/os no habían estudiado previamente números enteros durante el curso, sin embargo, es posible que alguna/o haya poseído conocimientos previos (aunque se trata de un contenido presente en el Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada (Ministerio de Educación de la Pcia. de Santa Fe, 2014), no así de primaria). Las actividades fueron confeccionadas por las docentes, atendiendo a la experiencia previa presentada en Emmanuele y Abinal (2020) y al contexto socioeconómico del que provienen las/os alumnas/os (en el caso de la escuela A, de un sector socioeconómico medio-alto y en el caso de la escuela B, de un sector socioeconómico medio-bajo). Se han convenido algunas modificaciones de la experiencia original (se detallan más adelante en la explicación de cada actividad), para que resulte más actual y cercana a lo cotidiano de las/os alumnas/os y para poder realizarlas en 8 horas cátedras totales, dado que el tiempo para realizarlas resultaba limitado (las actividades se llevaron a cabo los últimos días de clases del ciclo lectivo 2024). Las mismas se presentan a continuación según el orden de realización.

Actividad 1: "Vacaciones soñadas"

El objetivo de esta actividad es introducir la noción de número entero, llevando a cabo un registro formal de la actividad económica de una familia por mes y durante un año, para luego acordar un modo de representación significante del + y el - que representan números positivos y números negativos respectivamente. No se indicará previamente cómo realizar el registro de gastos o ingresos, por lo que cada grupo deberá tomar decisiones sobre cómo llevarlo adelante. Al finalizar, cada grupo deberá contar su situación económica. Es allí donde se pretende que se ponga de manifiesto (en comunicación oral y/o escrita) la forma de identificar pérdidas o ganancias, analizando las ventajas y desventajas de cada representación, acordando una forma (la del + y el -).

Elementos del juego:

Tablero: consta de tres casas distintas, de las cuales sale un camino formado por 12 casilleros, que representan los doce meses del año. Al final del último mes del año se encuentran las posibilidades de vacacionar.

Tarjetas: las tarjetas contendrán las acciones del juego, indicando ingresos o gastos de dinero. Las tarjetas permanecerán boca abajo y cada familia deberá sacar una por turno según lo que indique el dado.

Dado: cada familia tirará el dado, uno por vez.

Ficha de registro: hoja en blanco, donde cada familia llevará el registro de sus finanzas.

Sobres de colores: contendrán los ahorros de cada familia. Al comienzo del juego cada familia elegirá un color para seleccionar un sobre y no podrá abrirlo hasta el final, momento en el que conocerán cuánto dinero tienen ahorrado en el banco.

Reglas del juego:

1) Los participantes se dividen en tres grupos, cada uno constituirá una familia (de 4 o 5

integrantes).
2) Cada familia elige un sobre que contiene los ahorros que tienen en el banco. El sobre no deberá ser abierto hasta el final del juego.
3) Cada integrante de cada familia deberá tirar el dado cada mes, el número obtenido indicará la cantidad de tarjetas que deberán dejar pasar antes de obtener la tarjeta con gastos e ingresos de ese mes. La tarjeta obtenida se coloca sobre el tablero en el lugar correspondiente al mes indicado. Se turnará una familia por vez para sacar una tarjeta.
4) Cada familia deberá llevar un registro para saber cuánto dinero posee en cada mes.
5) Una vez que hayan obtenido las doce tarjetas (una por cada mes del año) deberá mostrar y verificar sus finanzas al final del año. En ese momento, cada familia abre el sobre de los ahorros. Contabiliza el monto total.
6) La familia que más dinero tenga ahorrado gana las vacaciones soñadas (un viaje y estadía en Cancún). El resto de las familias también obtendrán premios por segundo y tercer lugar (viaje y estadía en Mar del Plata y estadía en un camping en Funes, respectivamente).
Modificaciones respecto a la propuesta original: se optó por considerar cada casillero como un mes del año, en lugar de interpretarlo como los últimos 12 días del año. Esta decisión se fundamentó en la idea de que, en general, las familias perciben ingresos mensualmente y enfrentan gastos con la misma periodicidad (servicios como luz, gas, cuotas escolares, entre otros). A diferencia de la propuesta original -que asumía ingresos diarios por trabajos eventuales (como plomería, gasista, etc.)-, esta adaptación respondió a la organización económica y familiar predominante entre las/os alumnas/os de las escuelas donde se implementó la actividad. Esta actividad se llevó a cabo en 4 horas cátedra.

Actividad 2: “los 20 puntos”
La propuesta consiste en lanzar simultáneamente cinco dados y registrar los puntos obtenidos en cada tirada. Cada cara del dado representa un punto a favor o en contra, según su color. Resulta ganador el equipo que alcanza primero los 20 puntos. El objetivo principal de esta actividad es favorecer la superación de la concepción de número únicamente como cantidad, al mismo tiempo que se busca fortalecer el cálculo mental.
Elementos del juego:
Cinco dados cuyas caras tienen distintos colores: cara verde (suma 1 punto), cara rosa (resta 1 punto) y cara blanca (no suma nada y el pierde el turno). Tres dados tienen cuatro caras verdes y dos rosas, los otros dos tienen dos caras verdes, tres rosas y una blanca.
Reglas del juego:
El alumnado se divide en 3 equipos de 8 alumnas/os cada uno aproximadamente. Se pondrán en filas (el orden en que se dispondrán en las filas se determina sacando un papel con un número del 1 al 8, o de la cantidad de participantes por equipo). Luego se tira un dado para determinar el orden de los equipos A, B y C (el primero de cada equipo tira el dado).
Cada alumna/o por equipo tira los 5 dados de colores al mismo tiempo y cuenta los puntos que obtiene. Si en una tirada se obtienen puntos a favor, continúa tirando el mismo equipo.

Cada jugador va anotando los puntos obtenidos en su tirada en el pizarrón. Se juega hasta que algún equipo alcance 20 puntos.
En una segunda instancia, se modifican las reglas del juego de forma tal que las caras verdes suman 5 puntos y las caras rosas restan 7 puntos. Además, se juega por cierto tiempo, ganando el equipo que más puntos tenga al finalizar el juego. Esta modificación se realiza con el objetivo de complejizar el cálculo mental y generar diferentes estrategias para sumar los resultados finales (por ejemplo, separar los números positivos de los negativos).
Modificaciones respecto a la propuesta original: Se decidió establecer un puntaje final de 20 puntos, en lugar de los 100 propuestos originalmente, con el fin de adecuar la actividad a los tiempos disponibles en el aula. Esta modificación respondió a la necesidad de que la propuesta pudiera desarrollarse y concluirse dentro de un bloque de clase de 40 minutos (1 hora cátedra). Otra propuesta posible, si el tiempo es limitado, consiste en asignar un tiempo de juego y al finalizar el tiempo contar los puntos obtenidos por cada equipo, ganando aquel que haya conseguido el mayor puntaje (en caso de empate, se pueden realizar tiradas extras para definir un ganador).

Actividad 3: “Recorrido histórico del número entero”
La propuesta tiene como objetivo realizar un recorrido histórico-epistemológico del número entero, con el propósito de conocer y analizar los obstáculos que se presentaron en su construcción y evolución hasta convertirse en el concepto abstracto que conocemos en la actualidad. Asimismo, se busca evidenciar los miles de años que le llevó a la sociedad la aceptación del número negativo como parte del sistema numérico. Paralelamente, la actividad pretende favorecer el desarrollo de la expresión oral y la comprensión lectora en las/os alumnas/os.
Reglas de la actividad:
Se divide a las/os alumnas/os en cinco grupos. A cada grupo se le asigna la lectura de un texto relacionado con un momento histórico relevante en el desarrollo del concepto de número entero, ya sea vinculado a sus orígenes, a su construcción o aceptación como objeto matemático. Luego de la lectura, las/os estudiantes deberán responder una serie de preguntas orientadas a la interpretación del texto, a la ampliación de la información y al análisis crítico del contenido. Posteriormente, cada grupo deberá ubicar el hecho histórico correspondiente en una línea de tiempo aproximada y realizar una exposición oral frente al resto de la clase, presentando lo leído y las conclusiones alcanzadas. Esta actividad se llevó a cabo en 3 horas cátedra.
Los textos que recibieron las/os alumnas/os presentaban un desarrollo de los siguientes fragmentos referidos a diferentes momentos históricos en torno al número entero (Collete, 1985; Boyer, 1986):

- La matemática en la civilización china antigua: aparece la negatividad en la resolución de problemas a partir de cuadrados mágicos en documentos como el Chui-chang suan-shu (aproximadamente 250 a.C.). Aunque los números negativos no eran concebidos ni aceptados en la civilización china antigua, los chinos avanzaron utilizando el término Fu para indicar un resultado negativo de una resta y el término Cheng para una diferencia positiva (utilizando colores negro y rojo para cada uno de ellos).

- La matemática en la civilización india: los indios introdujeron los números negativos para indicar deudas y utilizaban los números positivos para representar activos. También se debe a los matemáticos indios la introducción del número cero como número (ya no como símbolo para representar el espacio vacío). El primer uso conocido de tales números se debe a Brahmagupta, hacia el 628 d.C., uno de los más reconocidos matemáticos del siglo VII en India, quien se distingue porque en su libro, escribe las soluciones negativas de ciertas ecuaciones y no presenta conflicto en aceptar estos objetos, hasta entonces no reconocidos.
- La matemática árabe: los árabes, en la época de Al-Khowarizmi (se aproxima la fecha de su muerte alrededor del año 850), estaban familiarizados con los números negativos y las reglas para hacer operaciones entre ellos. Sin embargo, los rechazaban como número. Por ejemplo, comprendían que 3-4=-1 pues el minuendo es menor que el sustraendo, pero no aceptaban estos números como solución posible de una ecuación, puesto que la matemática surgía por la necesidad de contar y representar correctamente situaciones que utilizaban lo concreto, lo intuitivo y lo real para justificar el pensamiento que involucraba la representación y uso del número como cantidad o medida.
- La matemática en Europa Occidental (siglo XV al XVII): durante esta época hubo desarrollos importantes de la matemática, sobre todo en lo referido a la aritmética y al álgebra. El desarrollo de la actividad bancaria y comercial pedía una mejora en los métodos para el cálculo numérico. Hacia el año 1500 se aceptaba el cero como un número. En cuanto a los negativos, aunque conocidos en Europa, no eran aceptados como números por la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII. Curiosamente, el nombre con el que se llamó a estos números muestra un cierto rechazo hacia ellos, pues “negativo” indica una predisposición en contra de su aceptación: se lo acepta, pero de mala gana. Uno de los primeros matemáticos en aceptar los números negativos fue Thomas Harriot (1560-1621). También fue uno de los primeros en utilizar el signo menos (-) tanto para la resta como para los números negativos. Las primeras abreviaturas utilizadas para la suma (+) fueron usar una p y para la resta (-) una m. El lenguaje matemático utilizado en esta época era sincopado, es decir, una mezcla entre el lenguaje coloquial y algunas abreviaciones (aún no existía el lenguaje simbólico). Los símbolos + y -, como actualmente los conocemos, fueron introducidos por los alemanes en el siglo XV para denotar excesos y defectos de los pesos de cobres y arcas.
- La matemática en Francia y Alemania (durante el siglo XIX): Hankel (1839-1873) fue un matemático alemán, que, a pesar de haber muerto a la temprana edad de 34 años, planteó ideas que serían las bases para la aceptación de los números negativos. Señalaba que, para construir una aritmética universal, la matemática debía ser separada

de percepciones sensoriales, ya que la matemática es una creación intelectual del ser humano y, por tanto, inventada. Hankel extendió las definiciones de las operaciones elementales de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división), y trasladó y validó las propiedades de los naturales a los números negativos.

Resultados de la experiencia

En lo que sigue se exponen algunos de los resultados de la propuesta en cada uno de los cursos de primer año de la escuela A y la escuela B y se comparan con aquellos obtenidos en Abinal y Emmanuele (2020) (allí solo se presentan los resultados obtenidos de la actividad 1).

Relato de la experiencia de la Actividad 1:

En ambas escuelas, las docentes explicaron las reglas del juego, se armó el tablero en una mesa y se dispusieron las tarjetas sobre la misma. Se organizaron los grupos que representan a cada familia del juego y se les pidió que asignaran un nombre a la familia. Además, se especificó que no utilicen la calculadora para realizar cuentas. Algunas/os alumnas/os preguntaron cómo debían llevar el registro, a lo cual se les respondió que quedaba a consideración de como quisieran hacerlo. Comenzaron a jugar y cada grupo escribió y organizó en una hoja de papel los montos obtenidos. Se presentan aquí algunos de los registros obtenidos (los que se consideraron más relevantes):

En la escuela A, la familia “Dream” registró en una columna con el nombre “ingreso” los saldos a favor y en otra columna con el nombre “gastos” los saldos en contra. Al finalizar el registro de las 12 tarjetas sumaron los gastos de cada mes, los ingresos de cada mes y restaron ingresos de gastos (obtuvieron saldo a favor dado que los ingresos eran mayores a los gastos). Esta estrategia se observó también en otros dos equipos. Las alumnas del grupo “Dreams” comentaron que esta decisión de realizar el balance al final del año fue a razón de que la primera tarjeta obtenida no tenía ingresos por obtener “sueldo embargado por deuda” (como se observa en imagen 1). Al no poder realizar la resta entre ingresos y gastos en el primer mes, decidieron continuar con el registro mes a mes y realizar la resta al final del año.

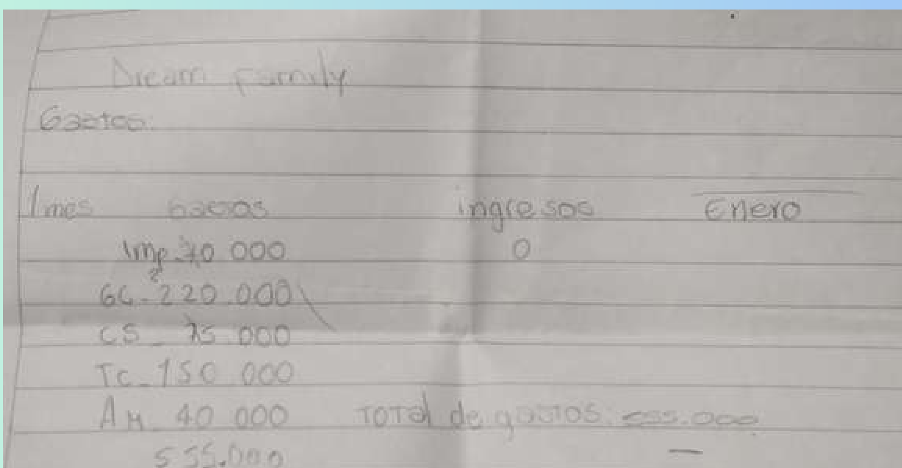

Imagen 1. Registro de gastos e ingresos del grupo “Dream” del mes enero

Esta misma situación se presentó en otro de los equipos, aunque se abordó de manera diferente: en el primer mes anotaron el importe de los gastos y entre paréntesis escribieron la frase “a pagar”. Al mes siguiente restaron al sueldo, el total de gastos (que en este caso era menor al sueldo). Con el dinero de “sobra”, pensaron en pagar parte de la deuda del mes anterior, escribiendo el monto obtenido de la diferencia entre la deuda y el dinero sobrante seguido de la frase “deuda a pagar”. Con el correr de los meses pudieron “saldar la deuda”, obteniendo montos a favor. A partir de allí escribieron la palabra “quedó” adelante del número correspondiente al excedente. Otro grupo, la familia “Ambis”, también registró mes a mes el saldo obtenido, realizando la resta entre el sueldo y los gastos de cada mes. Utilizaron un número natural para representar un saldo a favor y para saldos en contra utilizaron la palabra “deuda” al final del importe.

En la escuela B, uno de los grupos debitó al importe del sueldo el total de los importes del mes (en las tarjetas que les tocaron todos los otros importes, menos el sueldo, correspondían a gastos). Cuando no se llegaba a cubrir el total de los gastos con el sueldo del mes, registraron el importe de la diferencia seguido de la letra D (los alumnos comentaron que era el dinero que faltaba para poder cubrir la deuda). Cuando pasaron al pizarrón para la puesta en común, registraron en color rojo las deudas y en color negro los ingresos en cada mes. Luego sumaron todos los ingresos y por otro lado todas las deudas.

Restaron al total de los ingresos el total de las deudas, justo el monto de deuda era menor que el de los ingresos. Cabe aclarar que este grupo tuvo dificultades para comprender la actividad puesto que no concebían el hecho de que se pudiera gastar dinero que no se tiene, es decir que los gastos pudieran ser mayores al sueldo. A partir de la intervención de la docente, pudieron concluir que se trataba de una deuda y a partir de allí lograron llevar adelante la actividad. Otro grupo registró mes a mes la resta entre ingresos y deudas, anotando el resultado con un signo - o + atrás del número para identificar si el resultado es deuda o ingreso respectivamente. Luego, por un lado, sumaron los ingresos con los ahorros del banco, por otro, sumaron los gastos y luego restaron ambos importes.

Comparando estos resultados con los obtenidos en Abinal y Emmanuele (2020), se observa que la estrategia más frecuente es la de clasificar en ingresos y gastos los importes obtenidos en cada tarjeta, organizando los datos en dos columnas. Este registro se observó para cada mes, pero también como balance al finalizar el año (ingresos totales de cada mes y gastos totales de cada mes). En general, las/os alumnas/os perciben sin dificultad cuando están en presencia de una deuda, justificando que los gastos son mayores al sueldo (o a los ingresos). También se hizo presente la necesidad de utilizar una palabra, una abreviación de ella o alguna forma para identificar que se trata de un monto “que tengo” o “que debo”, tal como lo describen las/os alumnas/os en forma escrita u oral. Esto se evidencia cuando escriben las palabras “nos sobró”, “quedó”, “deuda”, utilizaron una D, un color negro o rojo o, en el caso de Abinal y Emmanuele (2020), una g y una p (para representar ganancia o pérdida) o una cara contenta y una cara triste. De la actividad surge la importancia de comunicar de forma clara y eficiente los resultados obtenidos de un contexto, de ponerse de acuerdo en cuanto a la forma de comunicar para que todos

entiendan lo mismo y no dar lugar a confusión. Es importante que la intervención docente, en la puesta en común de los grupos, tenga el propósito de construir la concepción de convención matemática y resaltar la importancia del símbolo, no solo por su economía, sino también como vía indispensable para la construcción de un nuevo objeto matemático, en este caso, el de número entero.
En esta experiencia, las docentes presentaron los signos + y - para diferenciar números positivos de números negativos al finalizar el juego y antes de pasar a la siguiente actividad.

Relato de la experiencia de la Actividad 2:
Se organizó a las/os alumnas/os en tres grupos (escuela A) y en dos grupos (escuela B). Se explicaron las reglas del juego y se comenzó con la actividad.
En la escuela A, los grupos iban anotando en el pizarrón el puntaje obtenido en cada tirada y el puntaje parcial total. Al tirar los dados, las/os alumnas/os comprendieron rápidamente que las caras verdes suman un punto cada una y las caras rosas restan puntos. Luego, al mirar si la cantidad de caras verdes obtenidas era mayor a la de caras rosas comprendieron que habían obtenido puntos a favor (anotaron el resultado de la resta entre caras verdes y rosas, con un número sin signo) y, viceversa, si la cantidad de caras rosas era mayor a las verdes obtenían puntos en contra y, en este caso, el resultado de la resta la anotaron con un número negativo (usaron el signo - adelante del número). El número obtenido debían sumarlo o restarlo al resultado parcial, por lo que realizaron sumas entre número negativos y positivos sin dificultades (aunque sin formalizar esta operatoria). Cuando alguien manifestaba dudas respecto de los resultados, sus compañeras/os de grupo intervenían para colaborar y registrar correctamente las respuestas. A medida que más alumnas/os participaban, la dinámica se volvió cada vez más fluida, ya que la mayoría logró comprender la lógica del juego.
En la escuela B, se cambiaron las reglas del juego: en vez de ganar aquel equipo que llega primero a los 20 puntos, gana el que, una vez finalizado un tiempo específico, obtiene más puntos. Las/os alumnas/os fueron registrando en el pizarrón los puntos obtenidos en cada tirada, usando la misma estrategia que se observó en la escuela A. Al finalizar el tiempo, sumaron los resultados uno a uno en orden de las tiradas. No se observaron dificultades para su realización. Este hecho sugiere que la suma de números enteros fue asimilada de manera espontánea y significativa en el contexto lúdico, sin necesidad de una explicación formal previa sobre la operatoria correspondiente.

Relato de la experiencia de la Actividad 3:
En ambas escuelas las/os alumnas/os fueron organizados en grupos. A cada grupo se le entregó una fotocopia con el texto asignado según un momento histórico determinado y las actividades correspondientes. Se destinó un tiempo específico para que pudieran trabajar colaborativamente y resolver, con ayuda de la docente, las dudas que surgieran durante la lectura. Finalizado este trabajo, se trazó en el pizarrón una línea de tiempo en la que cada grupo debió ubicar el hecho histórico que le había tocado analizar. Finalmente, los grupos

realizaron sus exposiciones orales siguiendo el orden cronológico establecido en la línea histórica, como se muestra en la imagen 2.

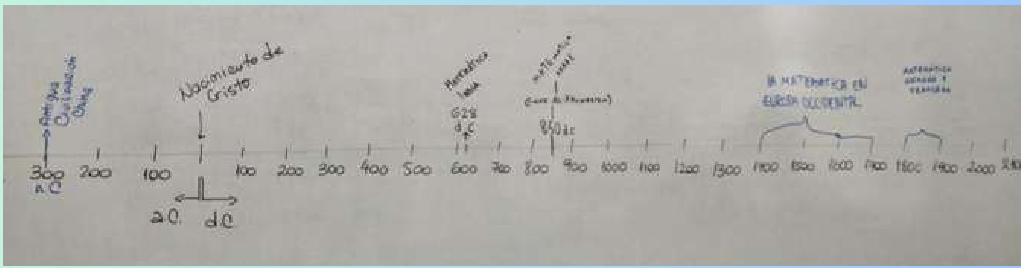

Imagen 2. Línea histórica de la evolución histórica del número entero

Cada grupo realizó su exposición, explicando con sus propias palabras los distintos momentos históricos, con algunas intervenciones complementarias por parte de la docente. Las/os alumnas/os tuvieron la oportunidad de acercarse a la historia del número entero, reconociendo la extensa cantidad de siglos que implicó su aceptación como objeto matemático y como número distinto al natural. Asimismo, pudieron comprender que los números y la notación matemática simbólica no siempre fueron como las conocemos en la actualidad.

A continuación, se presentan algunas actividades propuestas y las respuestas más relevantes brindadas por las/os alumnas/os:

A los grupos que se les había asignado trabajar con el texto de la civilización india y el de la civilización árabe se les propuso responder las siguientes preguntas, considerando que los matemáticos de dichas épocas no aceptaban a los números negativos como número y los rechazaban como soluciones de ecuaciones:

- ¿Conocen situaciones de la vida cotidiana donde se utilicen números negativos? Si es así menciona ejemplos.
- ¿Están de acuerdo con el pensamiento matemático predominante de la época que no aceptaba los números negativos por no estar relacionados con el mundo físico? ¿Les parece un concepto que va en contra de la intuición? ¿por qué?

La mayoría de las respuestas a la primera pregunta hacen referencia a situaciones financieras, se supone ligadas a la experiencia previa del juego vacaciones soñadas. Cabe aclarar que, en las clases dadas hasta ese momento, no se presentaron otras situaciones en donde se utilice números enteros negativos. Sin embargo, algunas/os alumnas/os reconocieron a las temperaturas bajo cero o una altura bajo el nivel del mar como situaciones donde se podrían utilizar estos números. La mayoría de los grupos acuerda que la aceptación de los números enteros no va contra la intuición, aunque dos de ellos reconocen su poca relación con problemas prácticos o con el mundo físico: “Un ejemplo podía ser cuando se trata de algo comercial o cuentas económicas en una familia. No estoy de acuerdo, pero es verdad que no está en relación con el mundo físico. Sí, porque ellos solo consideraban los números con los cuales puedes medir cantidades o medidas, ellos se centraban más en lo visible (lo físico)” (grupo 2, escuela B).

Por cuestiones de tiempo no se llegó a profundizar sobre las razones por las cuales la mayoría de los matemáticos no aceptaban la existencia de los números enteros antes y durante la mayor parte del siglo XIX, pero -aunque en forma sutil- pudieron encontrarse algunas diferencias en las respuestas de las/os alumnas/os -al menos algunas/os de ellas/os comprendieron ciertas razones por las cuales no se aceptaban-. Como propuesta de mejora para esta actividad, o como continuación de la misma, se podría organizar a las/os alumnas/os en dos grupos, uno de ellos que representen matemáticos que no aceptan a los números negativos y otros que sí los aceptan. Luego, en un debate u obra teatral representar las diferencias entre ellos dando argumentos para defender sus ideas.

Otra de las consignas propuestas, pedía investigar las diferencias entre los distintos tipos de lenguaje matemático a lo largo de la historia (retórico, sincopado y simbólico). Las/os alumnas/os que respondieron este enunciado reconocen al lenguaje retórico como aquel que "se transmitía a través del habla de generación tras generación", incluso otro grupo proporciona un ejemplo: "junto el tres con el dos y se vuelve cinco". En cuanto al lenguaje sincopado, se reconoce "el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se describían totalmente en lenguaje natural". Finalmente, el lenguaje simbólico se entiende como aquel que se utiliza actualmente en matemática, señalando el uso del + y del – en uno de los grupos. Esta actividad puede relacionarse con la de "vacaciones soñadas", puesto que se realiza el pasaje de lenguaje coloquial para distinguir deudas de ingresos a un lenguaje abreviado (como el uso de una "D" o una "p" para identificar pérdidas, o la "g" para ganancias), para finalmente acordar el uso de los símbolos + y -. Se trata de una aproximación a una recreación en el aula de la evolución del lenguaje matemático, contrastando con la evolución histórica y comprendiendo las dificultades inherentes a su construcción (muchas veces las mismas que se observan en la propia actividad escolar).

Otra de las consignas propone investigar el origen y el significado de la letra Z, que se utiliza para representar el conjunto de los números enteros. Todos los grupos coinciden en sus respuestas en que proviene de la palabra alemana "Zahlen" y que significa "números". Aunque se trate de una actividad muy simple de búsqueda, se da la oportunidad de concebir la idea de que lo simbólico se encuentra arraigado a lo cultural, al lenguaje de un lugar compuesto de significantes y significado.

La Actividad 3 tiene como propósito transmitir a las/os alumnas/os la idea de que los objetos de estudio de la matemática -y, en este caso particular, los números enteros- son el resultado de un proceso histórico extenso, que en muchos casos se desarrolla a lo largo de siglos y exige el aporte de numerosos matemáticos de distintas épocas. Asimismo, busca mostrar que dicho proceso no se da de manera lineal ni acumulativa, sino que implica tensiones, conflictos y contradicciones, ya que requiere superar concepciones previamente establecidas que muchas veces obstaculizan la construcción de nuevos conocimientos.

Algunas reflexiones finales

Creemos que la experiencia aquí presentada permite un acercamiento a una propuesta didáctica que genere procesos progresivos de significación y de abstracción. La propuesta lúdica (actividades 1 y 2) no solo ha motivado a las/os estudiantes -que no es menor, puesto que todos mostraron interés en participar-, sino que involucra y pone en juego la base de significados que ellas/os disponen y que es propia de su cultura, de lo cotidiano (como las finanzas de una familia o un juego donde se ganan o pierden puntos). Esto pudo observarse en la naturalidad con la que se desarrollaron estas actividades, requiriendo poca intervención de las docentes -más allá de la explicación de las reglas del juego-. Consideramos que se logra una aproximación hacia la construcción del concepto de número entero, sin olvidar que se trata de la aparición de una categoría nueva de número y distinta a la de número natural. Se trata de lograr un quiebre, que es epistemológico, puesto que no se trata de una extensión del campo numérico sino de un nuevo conjunto en donde sus elementos y sus operaciones deben ser (re)definidas. Entendemos que esta abstracción no se logra con el pasar de tres clases, y con solo tres actividades, sino que el proceso es mucho más complejo. Sin embargo, consideramos que la propuesta propicia la problematización del conocimiento superando la visión tradicional según la cual es la/el docente quien comunica verdades preexistentes a las/os alumnas/os y que concibe a la matemática como un campo de conocimiento acabado y continuo. Por el contrario, y especialmente a partir del trabajo que implica recuperar la historia epistemológica de la matemática en el aula, es posible mostrar que la matemática escolar puede construirse y desarrollarse de diversas maneras, evidenciando que la validez del conocimiento es relativa al individuo y al contexto cultural en el que dicho saber emerge, tal como se expresa en Cantoral et al. (2015).

Queda pendiente, en esta investigación en curso, desarrollar otras actividades tanto para el fortalecimiento de los aprendizajes logrados como para avanzar hacia la complejidad que supone la operatoria de números enteros. En este sentido, se pretende que las futuras investigaciones continúen promoviendo una comprensión significativa de los números enteros, integrando la dimensión histórica en su abordaje conceptual.

Referencias bibliográficas

Abálsamo, R., Berio, A., Kotowski, C., Liberto, L., Mastucci, S., y Quirós, N. (2013). *Matemática 2, fotoactivados*. Puerto de Palos.

Bachelard, G. (1997) *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Siglo XXI.

Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. Alianza.

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *NÚMEROS Revista de didáctica de las matemáticas*, (29), 5-18.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático en los libros de texto desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9–28.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91–116.

Collete, J. P. (1985a). *Historia de las Matemáticas I y II.* Siglo Veintiuno.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Effenberger, P. (2013). *Matemática II, contextos digitales*. Kapeluz.

Emmanuele, D. y Abinal, V. (2019). Dinamización de la enseñanza de la Matemática y resignificación de sus contenidos: primeras reflexiones. *Conexión, Revista de Investigaciones y Propuestas Educativas, 15*, 123-145.

Emmanuele, D. y Abinal, V. (2020). Dinamización de la enseñanza de los números enteros negativos: primera aproximación y reflexiones a partir de una experiencia docente. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 1* (33), 473-485.

Emmanuele, D., Justo, F. y Ponzoni, E. (2021). Números enteros negativos: condiciones de posibilidad para su transmisión. *Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática*, 107-121.

Gallardo, A. y Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (4), 255-268.

Herrera, J. L. y Zapatera, A. (2019). El número como cantidad física y concreta un obstáculo en el aprendizaje de los números enteros. *PNA 13*(4), 197-220.

Iriarte Bustos, M. D., Jimeno Perez, M. y Vargas-Machuca de Alva, J. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *SUMA*, (7), 13-18.

Kaczor, P. y Outón V. (2017). *Entre números II*. Santillana.

Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, Argentina. (2014). Diseño Curricular para Educación Secundaria Orientada.

Pluvinage, F. y Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 120-141.

Reyes Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema*, 28 (48), 360-382.

Soto, D., y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525–1544.